Psychologische Testtheorie

Sitzung 4

Testtheoretische Modelle II

Wahr-oder-Falsch Aussagen zur letzten Sitzung

1. Testtheoretische Modelle basieren auf der Annahme, dass die latente Variable mit der Itemantwort nur über die Fehlervariable zusammenhängt.

2. Die Annahmen eines testtheoretischen Modells können für einen konkreten psychologischen Test niemals widerlegt werden.

3. Im parallelen Modell wird angenommen, dass der wahre Wert auf jedem Item i identisch mit dem Wert auf der latenten Variable ist.

4. Die dritte Annahme im parallelen Modell besagt, dass die Fehlervariablen zweier beliebiger Items eines Tests nicht kovariieren und ist verletzt, sobald im Testverlauf Übungseffekte auftreten.

5. Eine zufällig gezogene Person beantwortet drei Items eines Reaktionszeittests, für den das parallele Modell gilt. Sie weist auf dem ersten Item einen Wert von 180, auf dem zweiten Item einen Wert von 193 und auf dem dritten Item einen Wert von 182 auf. Der Wert der gezogenen Person auf der latenten Variable *Alertness* beträgt 178.

   a) Die Realisation der Zufallsvariable X_1 ist 178.

   b) Die Realisation der Zufallsvariable ε_3 ist 4.

   c) Angenommen die Person würde unendlich oft auf das Item 2 antworten, wäre der Mittelwert dieser Antworten 193.

Überblick

Sitzung	Datum	Thema	Themenblock
1	13.10.25	Einführung	Begriffe, Modellierung von Antwortverhalten durch Zufallsvariablen & mathematische Grundlagen der Testtheorie
2	20.10.25	Wahrscheinlichkeitstheoret. Grundlagen	
3	27.10.25	Testtheoretische Modelle I	Testtheoretische Modelle
4	03.11.25	Testtheoretische Modelle II	

➢ In der heutigen Vorlesung werden wir weitere testtheoretische Modelle kennenlernen

Wiederholung

- Ausgangsform eines testtheoretischen Modells: $\boldsymbol{X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i}$

- Testtheoretische Modelle unterscheiden sich in ihren Modellannahmen bezüglich
  - des Zusammenhangs der zufälligen latenten Variable θ mit den zufälligen wahren Werten τ_i der Items des Tests
  - der Eigenschaften der Fehlervariablen ε_i

- Im parallelen Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$\boldsymbol{\sigma_i = 0}$, $\boldsymbol{\beta_i = 1}$

1. $\tau_i = \theta$ und somit $X_i = \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i
2. $VAR(\varepsilon_i) = VAR(\varepsilon_j)$ für alle Itempaare i, j
3. $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

2. Testtheoretische Modelle

Essentiell Paralleles Modell – Annahmen

Im essentiell parallelen Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

$VAR(\varepsilon_i) = VAR(\varepsilon_j)$ für alle Itempaare i, j

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

- **Rückgriff 1** auf Ausgangsmodell: $\boldsymbol{\tau_i} = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta = \sigma_i + 1 \cdot \theta = \boldsymbol{\sigma_i + \theta}$
- **Rückgriff 2** auf Ausgangsmodell: $\boldsymbol{X_i} = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i = \sigma_i + 1 \cdot \theta = \boldsymbol{\sigma_i + \theta + \varepsilon_i}$

Essentiell Paralleles Modell – Erste Annahme I

$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Die erste Annahme bezieht sich auf den Zusammenhang der zufälligen latenten Variable θ mit den zufälligen wahren Werten τ_i der Items des Tests
- In Worten: „Der zufällige wahre Wert auf jedem Item i setzt sich zusammen aus der zufälligen latenten Variable plus einer itemspezifischen Konstante σ_i"
- Die Konstanten σ_i werden auch als **Itemparameter** (**Itemschwierigkeitsparameter** oder **Itemleichtigkeitsparameter**) interpretiert. Sie sind unbekannte Modellparameter, die geschätzt werden müssen (dazu später mehr).
- Auf Ebene einer festen Person bedeutet die Annahme:

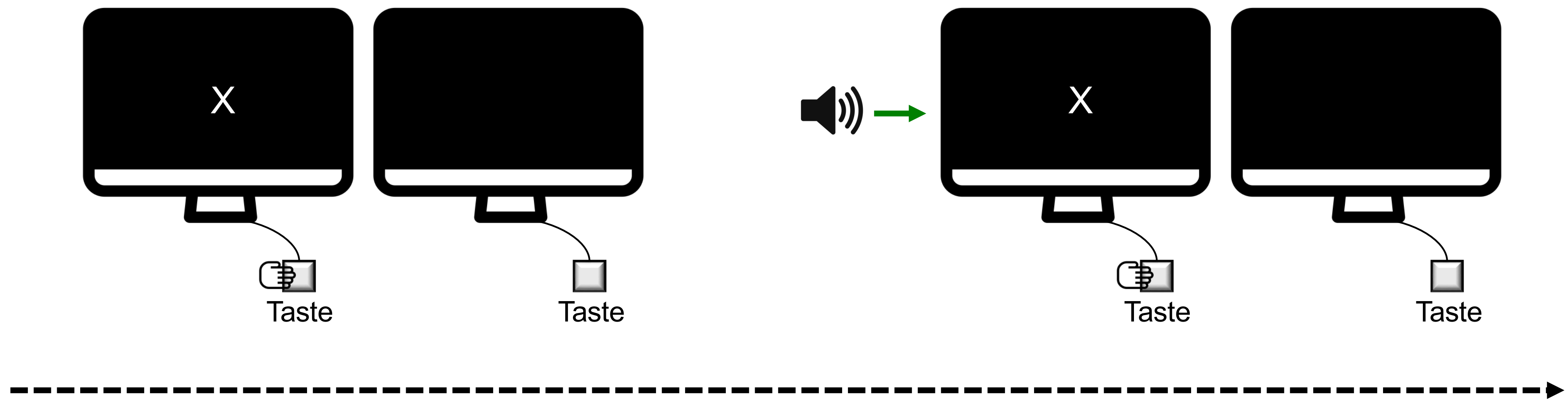
  $\tau_{iPerson} = \sigma_i + \theta_{Person}$ für alle Items i
- Im Gegensatz zum parallelen Modell, muss eine Person daher <u>nicht</u> denselben wahren Wert auf allen Items haben!
- Zur Interpretation der Itemparameter, siehe Zusatzmaterial im Moodle

Beispiel

Erweiterung des Reaktionszeit-Test um einen Test-Teil mit Warnton:

Item 1 (ohne Warnton)

Item 2 (mit Warnton)



- Manche Items erscheinen mit einem Warnton, welcher den Stimulus ankündigt, und manche ohne Warnton
- Items mit Warnton sollten zu geringerer Reaktionszeit führen, da die Reaktion durch den Warnreiz vorbereitet wird

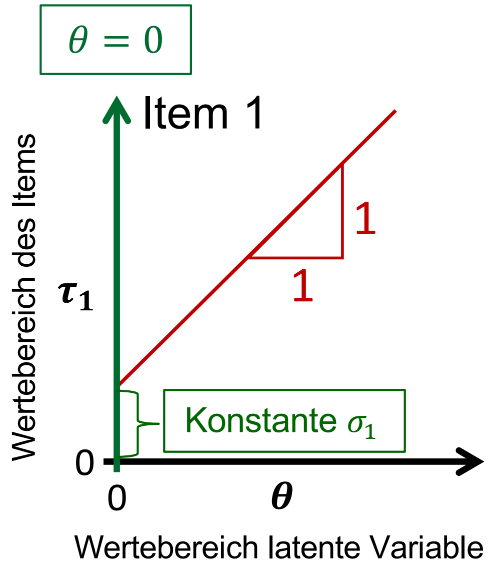
Essentiell Paralleles Modell – Erste Annahme II

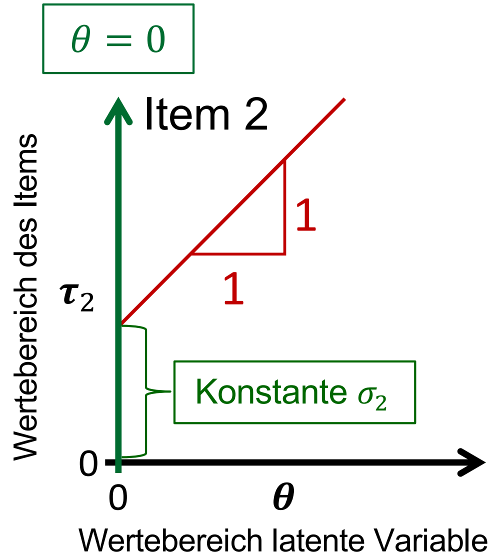
$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Bezogen auf unser Reaktionszeit-Beispiel:
  - Das Modell nimmt an, dass die durchschnittliche Reaktionszeit einer Person auf beide Items bei unendlicher Wiederholung des Tests nicht exakt gleich dem Wert auf der latenten Variable ist, sondern je Item um einen festen Wert σ_i vom Wert der latenten Variable abweicht
  - Wenn z.B. für den ersten Stimulus $\sigma_1 = 10$ wäre und für den zweiten Stimulus $\sigma_2 = -10$ und eine Person einen Alertnesswert von $\theta_{Person} = 180$ hätte, dann müsste der wahre Wert (also die „wahre Reaktionszeit") dieser Person auf dem ersten Stimulus $\sigma_1 + \theta_{Person} = 10 + 180 = 190(ms)$ betragen und der wahre Wert (also die „wahre Reaktionszeit") auf dem zweiten Stimulus wäre $\sigma_2 + \theta_{Person} = -10 + 180 = 170(ms)$

$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Grafische Veranschaulichung:





$$\tau_1 = \sigma_1 + 1 \cdot \theta = \sigma_1 + \theta \qquad \tau_2 = \sigma_2 + 1 \cdot \theta = \sigma_2 + \theta$$

da $\beta_1 = \beta_2 = 1$

Essentiell Paralleles Modell – Erste Annahme IV

$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Beim essentiell parallelen Modell zeigt sich ein häufiges „Problem“:
  Das Modell ist **nicht eindeutig**!
  - Vereinfacht ausgedrückt: Es gibt unendlich viele Kombinationen von Konstanten und latenten Variablen, die alle zu den gleichen wahren Werten führen

  → Für Interessierte: siehe Details im Zusatzmaterial auf Moodle
- Diese Uneindeutigkeit können wir umgehen, indem wir eine **Normierung** treffen:

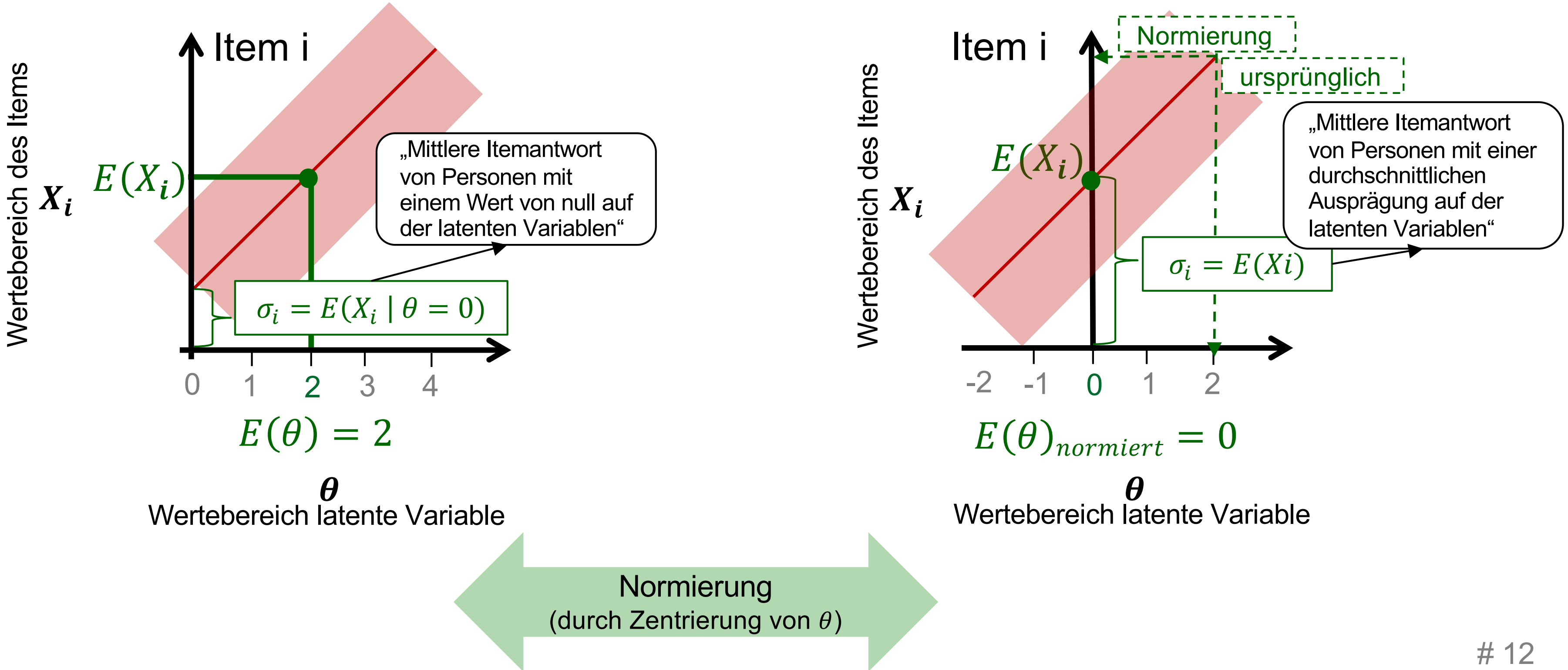
$$\boldsymbol{E(\theta) = 0}$$

- Dies ist **keine Modellannahme**, sondern eine **Festlegung**, die wir treffen,
  um ein eindeutiges Modell zu erhalten

Essentiell Paralleles Modell – Erste Annahme V

$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Durch die **Normierung** $\boldsymbol{E(\theta) = 0}$ wird das Modell eindeutig festgelegt und die Itemparameter σ_i erhalten darüber hinaus eine sinnvollere Interpretation



Essentiell Paralleles Modell – Erste Annahme VI

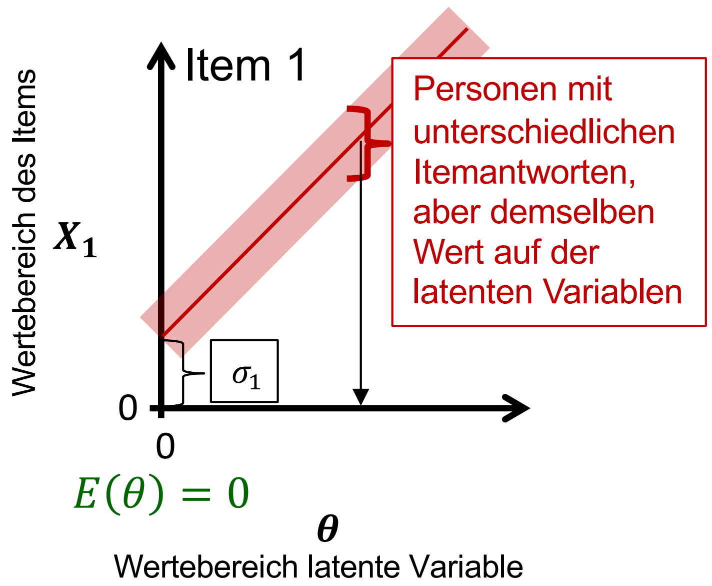
$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

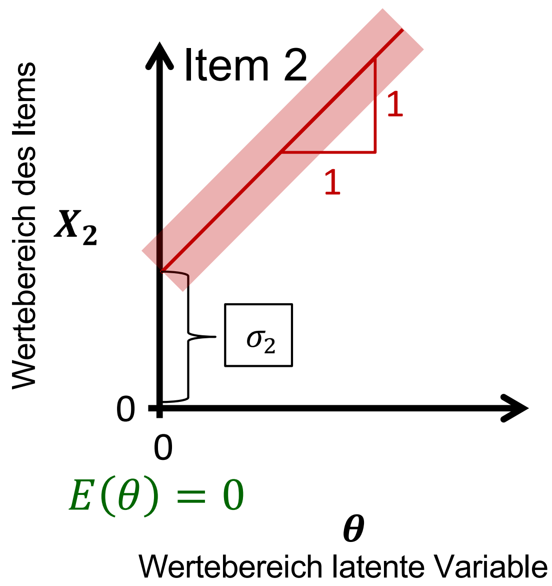
- Der **Itemparameter $\boldsymbol{\sigma_i}$ eines Items $\boldsymbol{i}$** entspricht im **essentiell parallelen Modell** unter der Normierung $E(\theta) = 0$ dem **Erwartungswert der Itemantwort** einer zufällig gezogenen Person auf Item i (Beweis in Anhang)
- Da wir diese Erwartungswerte schätzen können (siehe vorletzte Vorlesung), können wir auch die Itemparameter schätzen (später dazu mehr)

Essentiell Paralleles Modell – Zweite Annahme

$$VAR(\varepsilon_i) = VAR(\varepsilon_j) \text{ für alle Itempaare } i, j$$

- Genau wie im parallelen Modell: Die Fehlervariablen ε_i aller Items haben die gleiche Varianz





- Rote Balken gleich breit ➛ gleiche Fehlervarianzen

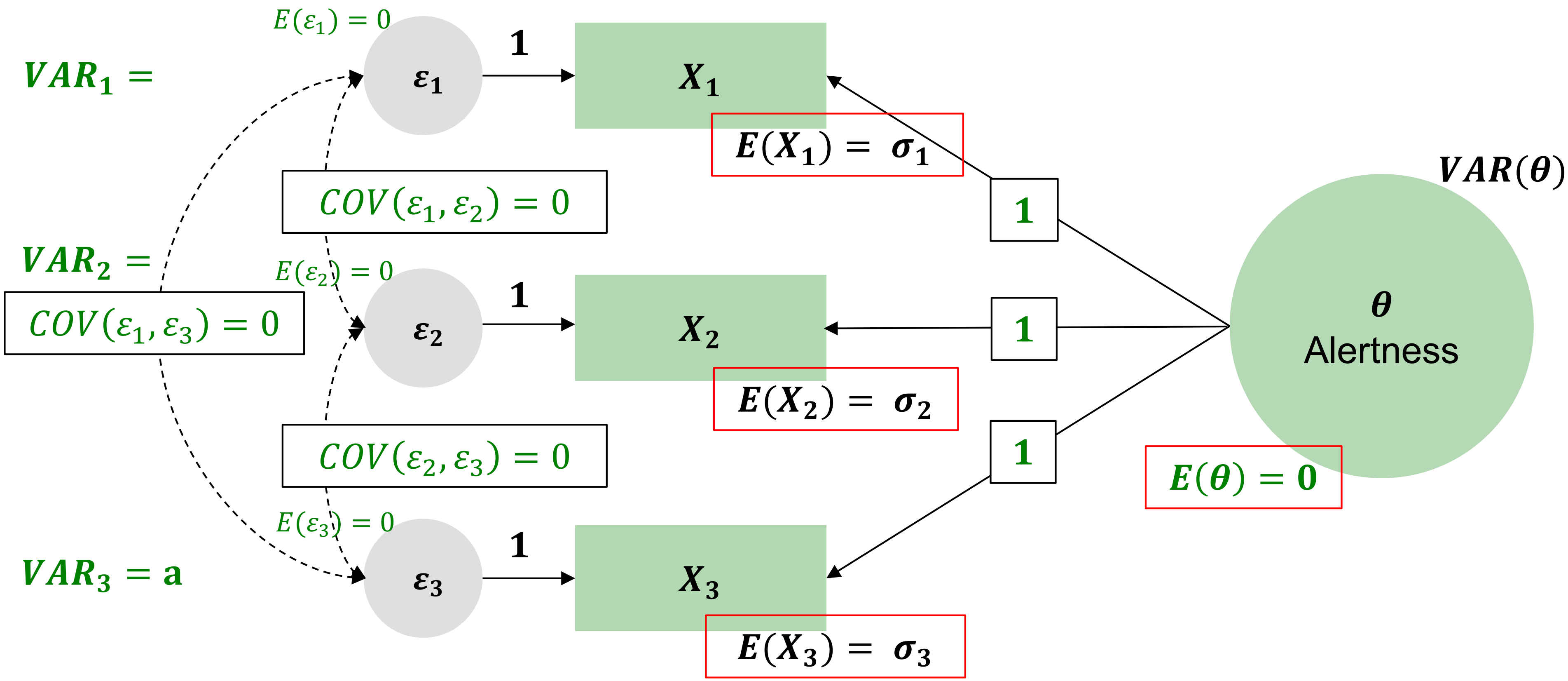
Essentiell Paralleles Modell – Dritte Annahme

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

- Genau wie im parallelen Modell: Die Fehlervariablen ε_i aller Items kovariieren nicht

Grafische Veranschaulichung des Essentiell Paralleles Modells I

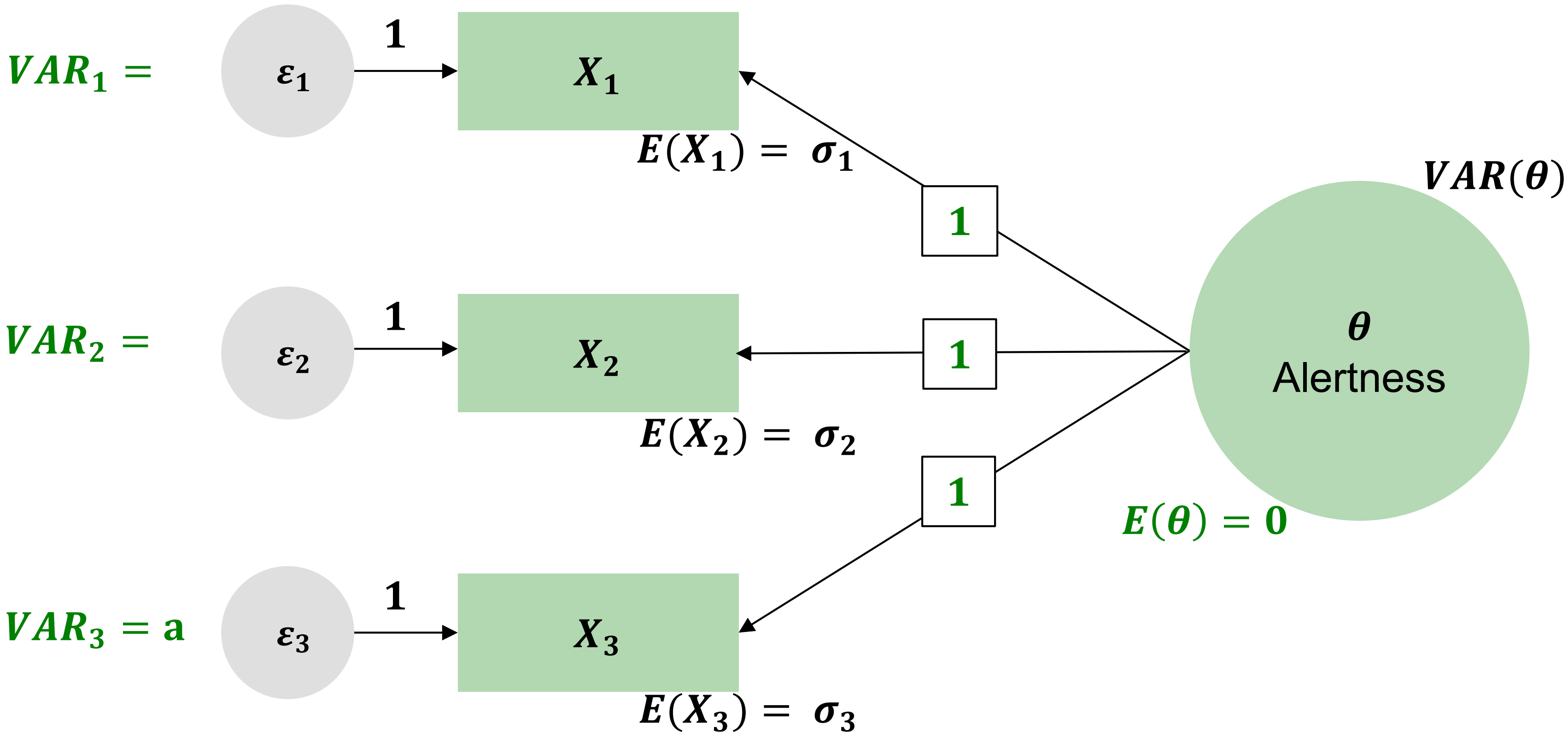
- Das **parallele** und das **essentiell parallele** Modell unterscheiden sich also nur in der ersten Annahme: $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ➤ $E(X_1) \neq E(X_2) \neq E(X_3)$, da $E(X_i) = \sigma_i$



Fixierte Parameter in dunkelgrün!

Grafische Veranschaulichung des Essentiell Paralleles Modells II

- Nimmt das Modell an, dass ein Zusammenhang gleich 0 ist, wird dieser oft nicht eingezeichnet, sondern meist nur Größen, die auch tatsächlich geschätzt werden
- Gleiche Parameter werden oft mit demselben Buchstaben angegeben, z.B. a



Fixierte Parameter in dunkelgrün!

Essentiell Paralleles Modell – Relevanz?

Im essentiell parallelen Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

$VAR(\varepsilon_i) = VAR(\varepsilon_j)$ für alle Itempaare i, j

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

Alle Items messen die latente Variable gleich gut und genau, aber in unters. Wertebereichen (d.h., Items sind unterschiedlich schwierig)!

→ Für welche Arten von Items ist dies ein realistisches Modell?

- Reaktionszeitaufgaben mit identischen Stimuli mit/ohne Warnton
- aber: Auch dieses Modell gilt in der Praxis eher selten!

2. Testtheoretische Modelle

2.1. Paralleles Modell

2.2. Essentiell Paralleles Modell

2.3. τ-äquivalentes Modell

2.4. Essentiell τ -äquivalentes Modell

2.5. τ -kongenerisches Modell

2.6. Mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell

τ-äquivalentes Modell – Annahmen

Im τ-äquivalenten Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$\tau_i = \theta$ und somit $X_i = \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

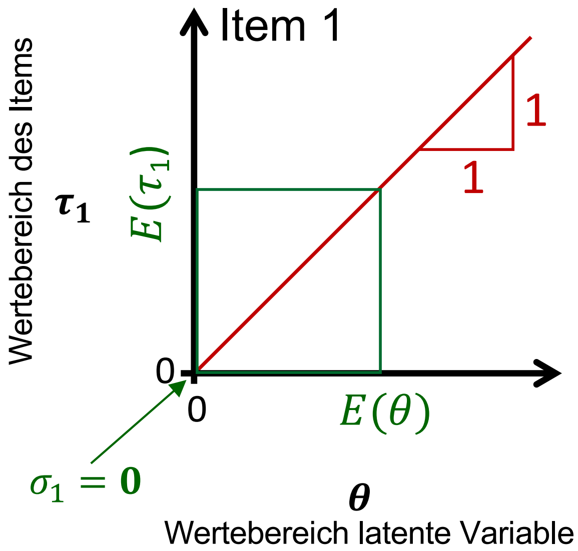
$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

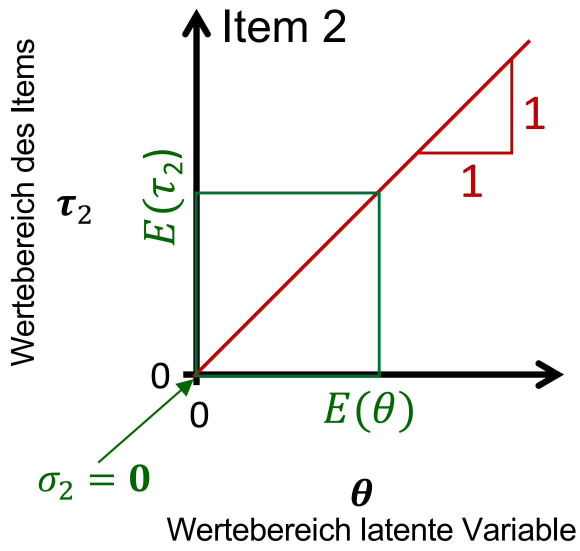
- **Rückgriff 1** auf Ausgangsmodell: $\boldsymbol{\tau_i} = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta = 0 + 1 \cdot \theta = \boldsymbol{\theta}$
- **Rückgriff 2** auf Ausgangsmodell: $\boldsymbol{X_i} = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i = 0 + 1 \cdot \theta = \boldsymbol{\theta + \varepsilon_i}$

τ-äquivalentes Modell – Erste Annahme

$$\tau_i = \theta \text{ und somit } X_i = \theta + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

- Wie im parallelen Modell: Der zufällige wahre Wert auf jedem Item i entspricht der zufälligen latenten Variable





$$\tau_1 = 0 + 1 \cdot \theta = \theta \qquad \tau_2 = 0 + 1 \cdot \theta = \theta$$

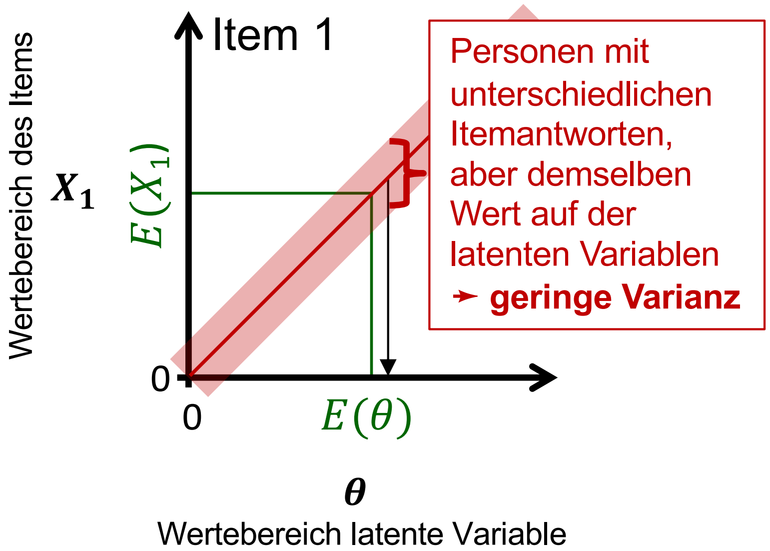
$$\text{da } \beta_1 = \beta_2 = 1 \text{ und } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

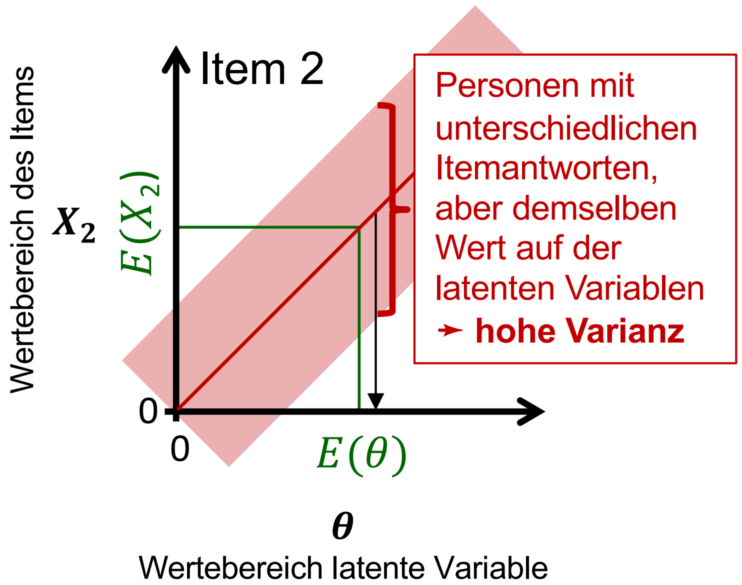
τ-äquivalentes Modell – Fehlervarianzen I

- Im Gegensatz zu den parallelen Modellen wird im τ-äquivalenten Modell **keine** Gleichheit der Varianzen der Fehlervariablen ε_i angenommen
- Die Varianzen $Var(\varepsilon_i)$ **müssen** also **nicht** für alle Items des Tests gleich groß sein (sie **dürfen** aber auch gleich sein)
- Bezogen auf unser Reaktionszeit-Beispiel:
  - Das Modell nimmt an, dass die Varianzen der Abweichungen zwischen den durchschnittlichen Reaktionszeiten einer Person und den tatsächlichen Reaktionszeiten bei unendlicher Wiederholung des Tests auf beiden Items **nicht** exakt gleich sein müssen
  - Wenn z.B. der wahre Wert (also die „wahre Reaktionszeit“) einer Person auf dem ersten Stimulus 170(ms) ist und auf den dem zweiten Stimulus 170(ms), dann könnten die tatsächlichen Reaktionszeiten der Person auf diese beiden Stimuli bei unendlicher Wiederholung jeweils **in unterschiedlichem Maße** um diese beiden wahren Werte streuen

τ-äquivalentes Modell – Fehlervarianzen II

- Grafische Veranschaulichung:





- Rote Balken sind unterschiedlich breit ➛ Fehlervarianzen unterscheiden sich

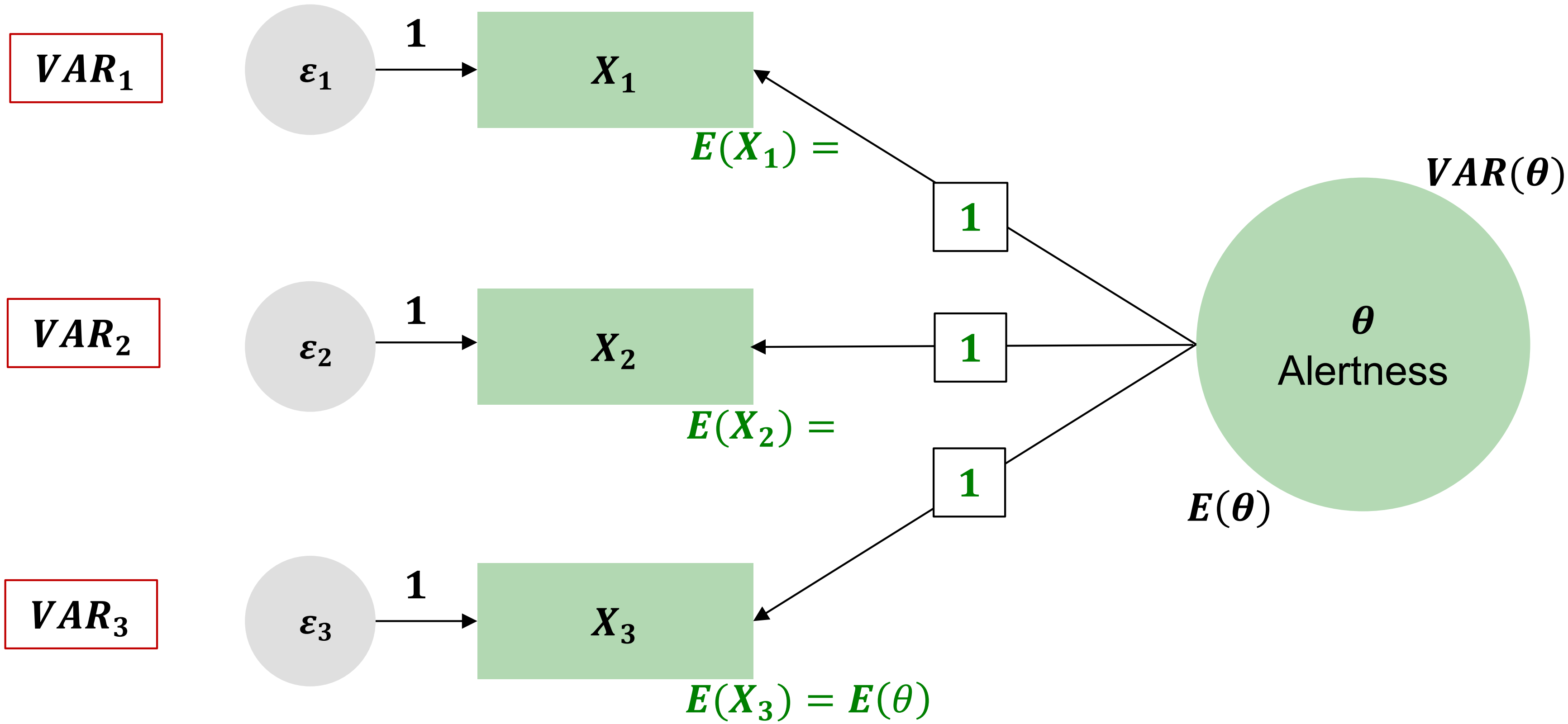
τ-äquivalentes Modell – Zweite Annahme

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

- Genau wie im parallelen und essentiell parallelen Modell (dort dritte Annahme): Die Fehlervariablen ε_i aller Items kovariieren nicht

Grafische Veranschaulichung des τ-äquivalenten Modells

- Nimmt das Modell an, dass ein Zusammenhang gleich 0 ist, wird dieser oft nicht eingezeichnet, sondern meist nur Größen, die auch tatsächlich geschätzt werden
- Gleiche Parameter werden oft mit demselben Buchstaben angegeben, z.B. a



Fixierte Parameter in dunkelgrün!

τ-äquivalentes Modell – Relevanz?

Im τ-äquivalenten Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$\tau_i = \theta$ und somit $X_i = \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

Alle Items messen die latente Variable im selben Wertebereich, gleich gut, aber unterschiedlich genau!

→ Für welche Arten von Items ist dies ein realistisches Modell?

- Rechenaufgaben mit unterschiedlicher Ratewahrscheinlichkeit
- Inhaltlich homogene Ratingskalen-Items mit unterschiedlich klarer Formulierung

2. Testtheoretische Modelle

Essentiell τ-äquivalentes Modell – Annahmen

Im essentiell τ-äquivalenten Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

- **Rückgriff 1** auf Ausgangsmodell: $\boldsymbol{\tau_i} = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta = \sigma_i + 1 \cdot \theta = \boldsymbol{\sigma_i + \theta}$
- **Rückgriff 2** auf Ausgangsmodell: $\boldsymbol{X_i} = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i = \sigma_i + 1 \cdot \theta = \boldsymbol{\sigma_i + \theta + \varepsilon_i}$

Essentiell τ-äquivalentes Modell – Erste Annahme I

$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Genau wie im essentiell parallelen Modell: Der zufällige wahre Wert auf jedem Item i setzt sich zusammen aus der zufälligen latenten Variable plus einer itemspezifischen Konstante σ_i
- Wie im essentiell parallelen Modell müssen wir aus Normierungsgründen den Erwartungswert der latenten Variable auf 0 setzen:

$$E(\theta) = 0$$

- Somit entspricht der Itemparameter eines Items i auch im essentiell τ-äquivalenten Modell dem Erwartungswert der Itemantwort einer zufällig gezogenen Person auf Item i (Begründung analog zu Folie #13)

Essentiell τ-äquivalentes Modell – Erste Annahme II

$$\tau_i = \sigma_i + \theta \text{ und somit } X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

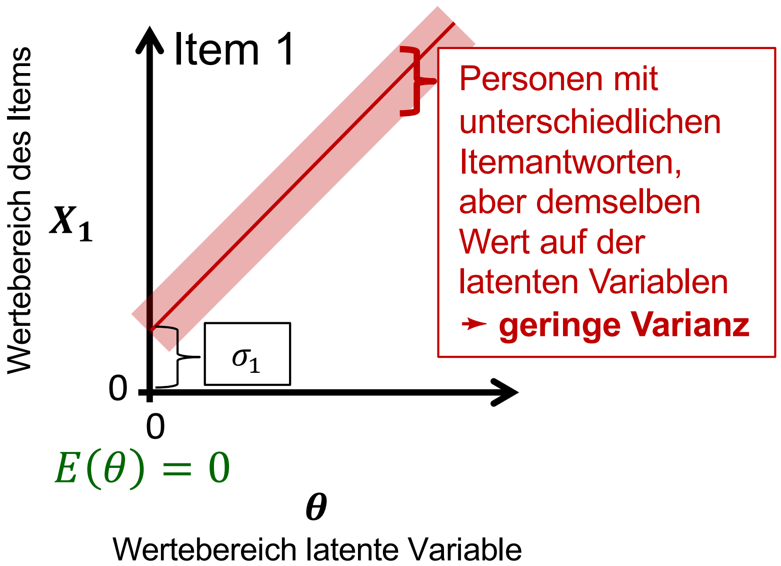
- Grafische Veranschaulichung:

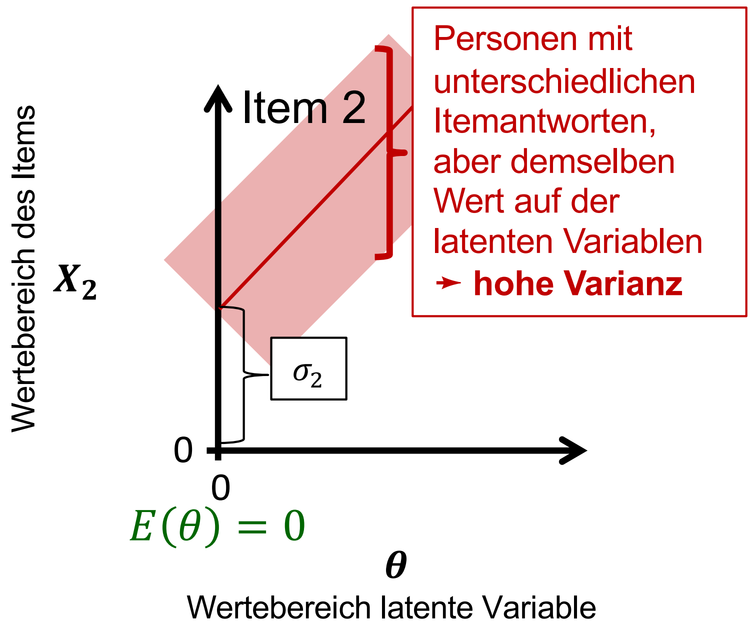
$$\tau_1 = \sigma_1 + 1 \cdot \theta = \sigma_1 + \theta \qquad \tau_2 = \sigma_2 + 1 \cdot \theta = \sigma_2 + \theta$$

da $\beta_1 = \beta_2 = 1$

Essentiell τ-äquivalentes Modell – Fehlervarianzen

- Genau wie im τ-äquivalenten Modell: Die Fehlervarianzen $Var(\varepsilon_i)$ müssen nicht für alle Items des Tests gleich groß sein





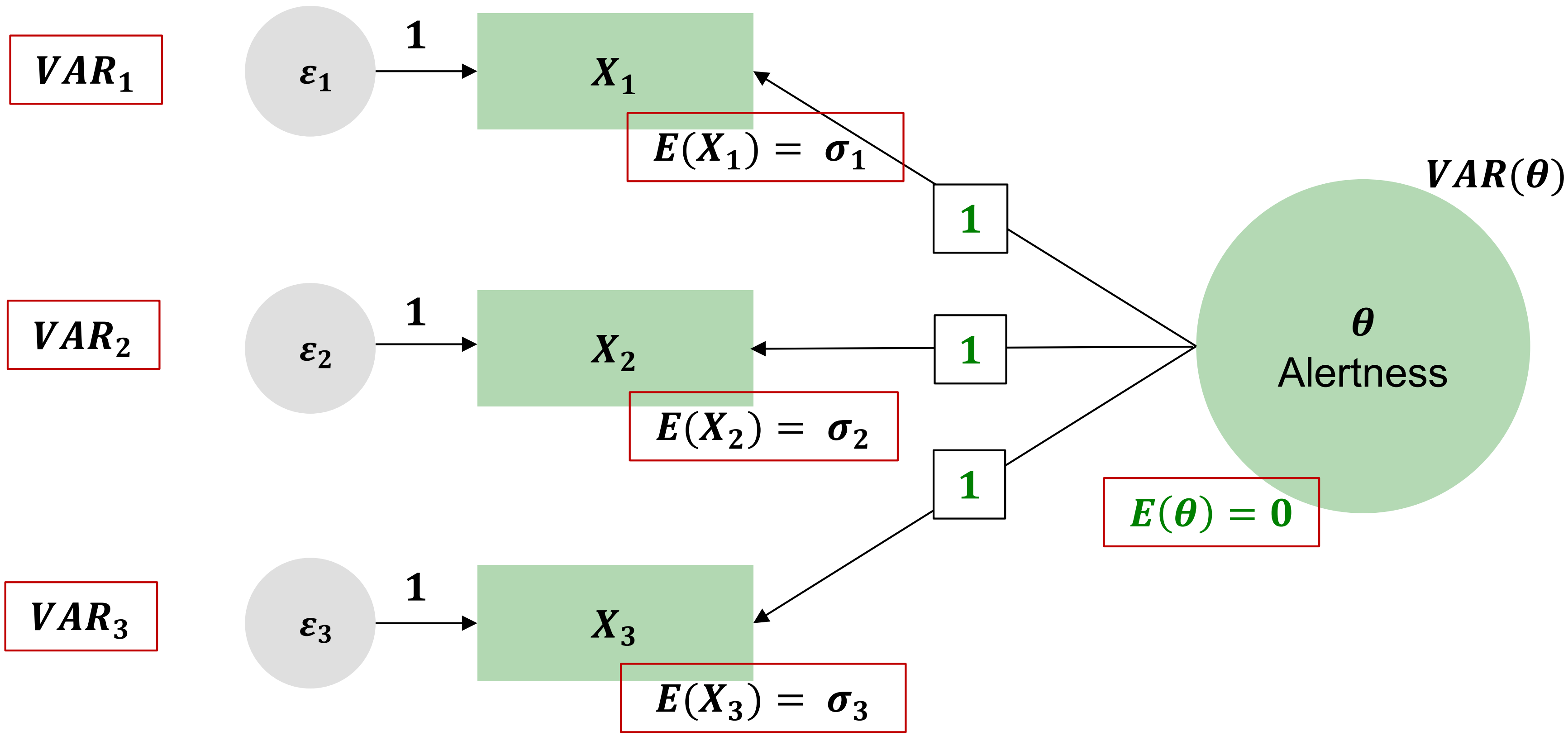
- Rote Balken sind unterschiedlich breit ➛ Fehlervarianzen unterscheiden sich

Essentiell τ-äquivalentes Modell – Dritte Annahme

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

- Genau wie in allen bisherigen Modellen: Die Fehlervariablen ε_i aller Items kovariieren nicht

Grafische Veranschaulichung des essentiell τ-äquivalenten Modells



Fixierte Parameter in dunkelgrün!

Essentiell τ-äquivalentes Modell – Relevanz?

Im essentiell τ-äquivalenten Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$\tau_i = \sigma_i + \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

$COV\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0$ für alle Itempaare i, j

Alle Items messen die latente Variable gleich gut, aber unterschiedlich genau und in unters. Wertebereichen!

→ Für welche Arten von Items ist dies ein realistisches Modell?

- Ratingskalen-Items, die unterschiedlich viel Zustimmung erzeugen (z.B. unterschiedlich scharf formuliert)

Die vier bisherigen Modelle im Vergleich

		Varianzen der Fehlervariablen	
		gleich	***beliebig***
Itemparameter	***nein***	parallel	τ-äquivalent
	ja	essentiell parallel	essentiell τ-äquivalent

- Alle vier Modell nehmen zudem $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare *i,j* an

2. Testtheoretische Modelle

2.1. Paralleles Modell
2.2. Essentiell Paralleles Modell
2.3. τ-äquivalentes Modell
2.4. Essentiell τ -äquivalentes Modell
2.5. τ -kongenerisches Modell
2.6. Mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell

τ-kongenerisches Modell – Annahmen

Im τ-kongenerischen Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

- Entspricht unserem Ausgangsmodell (Sitzung 3, Folie #16)

τ-kongenerisches Modell – Erste Annahme I

$\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Die erste Annahme bezieht sich auf den Zusammenhang der zufälligen latenten Variable θ mit den zufälligen wahren Werten τ_i der Items des Tests
- In Worten: „Der zufällige wahre Wert auf jedem Item i setzt sich zusammen aus der mit einer itemspezifischen Konstante β_i gewichteten zufälligen latenten Variable plus einer itemspezifischen Konstante σ_i"
- Die Konstanten σ_i werden **Itemparameter** genannt. Die Konstanten β_i werden **Steigungsparameter** genannt. Sie sind **unbekannte Modellparameter**, die geschätzt werden müssen (dazu später mehr).

τ-kongenerisches Modell – Erste Annahme II

$\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Wie im essentiell parallelen und im essentiell τ-äquivalenten Modell müssen wir aus Normierungsgründen den Erwartungswert der zufälligen latenten Variable auf 0 setzen:

$$E(\theta) = 0$$

- Zusätzlich müssen wir im τ-kongenerischen Modell auch noch die Varianz der zufälligen latenten Variable auf 1 setzen:

$$VAR(\theta) = 1$$

- Der **Itemparameter eines Items i** entspricht im **τ-kongenerischen Modell** unter der Normierung $E(\theta) = 0$ dem **Erwartungswert der Itemantwort** einer zufällig gezogenen Person auf Item i (Beweis im Anhang)

τ-kongenerisches Modell – Erste Annahme III

$\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Interpretation der Steigungsparameter:
  - Der Steigungsparameter β_i eines Items i entspricht einem **Regressionsgewicht**, das wir schon aus Statistik II kennen
- Für jedes Item hat er somit folgende Interpretation:
  - „Falls sich die latente Variable um eine Einheit erhöht, erhöht sich die durchschnittliche Itemantwort um β_i Einheiten“
  - Die Höhe von β_i gibt jeweils die **Stärke des Zusammenhangs** zwischen der latenten Variable und der Antwort auf Item i an

τ-kongenerisches Modell – Erste Annahme IV

$\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

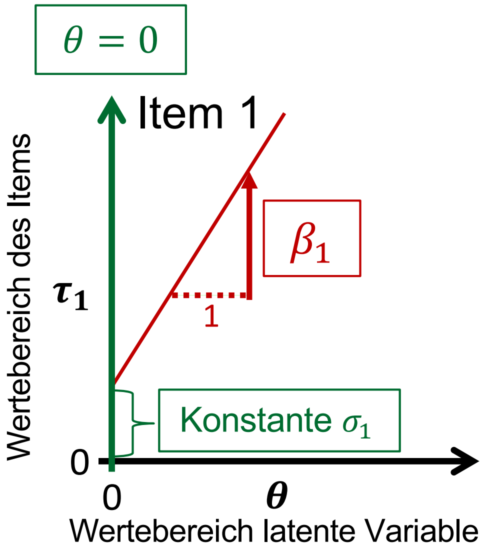
Bezogen auf unser Reaktionszeit-Beispiel:

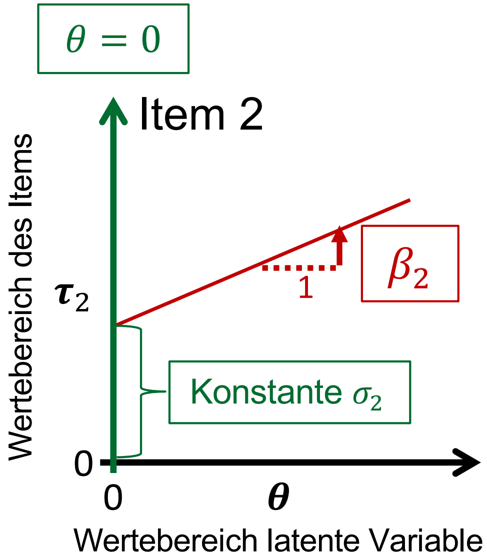
- Das Modell nimmt an, dass sich die durchschnittliche Reaktionszeit einer Person auf beiden Items bei unendlicher Wiederholung des Tests jeweils aus den Gleichungen $\sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta_{Person}$ und $\sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta_{Person}$ ergibt
- Wenn z.B. für den ersten Stimulus $\sigma_1 = 10$ und $\beta_1 = 2$ wäre und für den zweiten Stimulus $\sigma_2 = -10$ und $\beta_2 = 1$ und eine Person einen Alertnesswert von $\theta_{Person} = 180$ hätte, dann müsste der wahre Wert (also die „wahre Reaktionszeit") dieser Person auf dem ersten Stimulus $\sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta_{Person} = 10 + 2 \cdot 180 = 370(ms)$ betragen und auf dem zweiten Stimulus $\sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta_{Person} = -10 + 1 \cdot 180 = 170(ms)$

τ-kongenerisches Modell – Erste Annahme V

$\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Grafische Veranschaulichung:



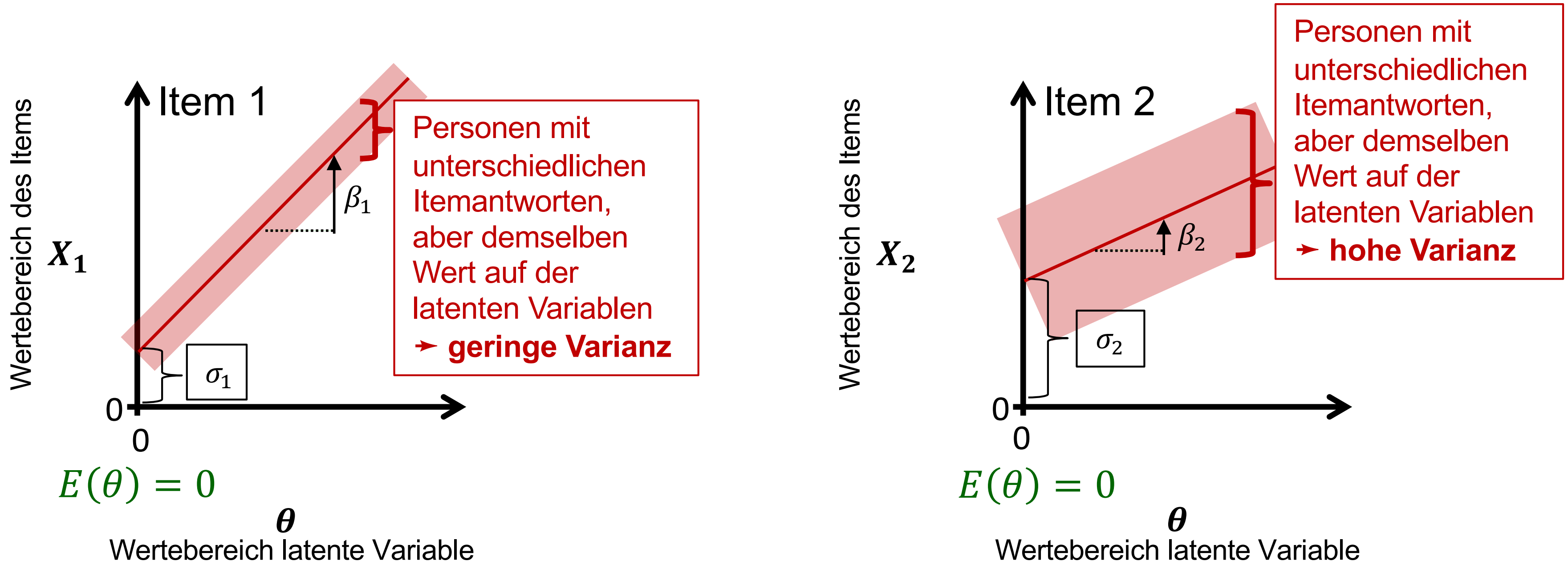


$\tau_1 = \sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta$

$\tau_2 = \sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta$

τ-kongenerisches Modell – Fehlervarianzen

- Genau wie im τ-äquivalenten und essentiell τ-äquivalenten Modell: Die Fehlervarianzen $Var(\varepsilon_i)$ müssen <u>nicht</u> für alle Items des Tests gleich groß sein



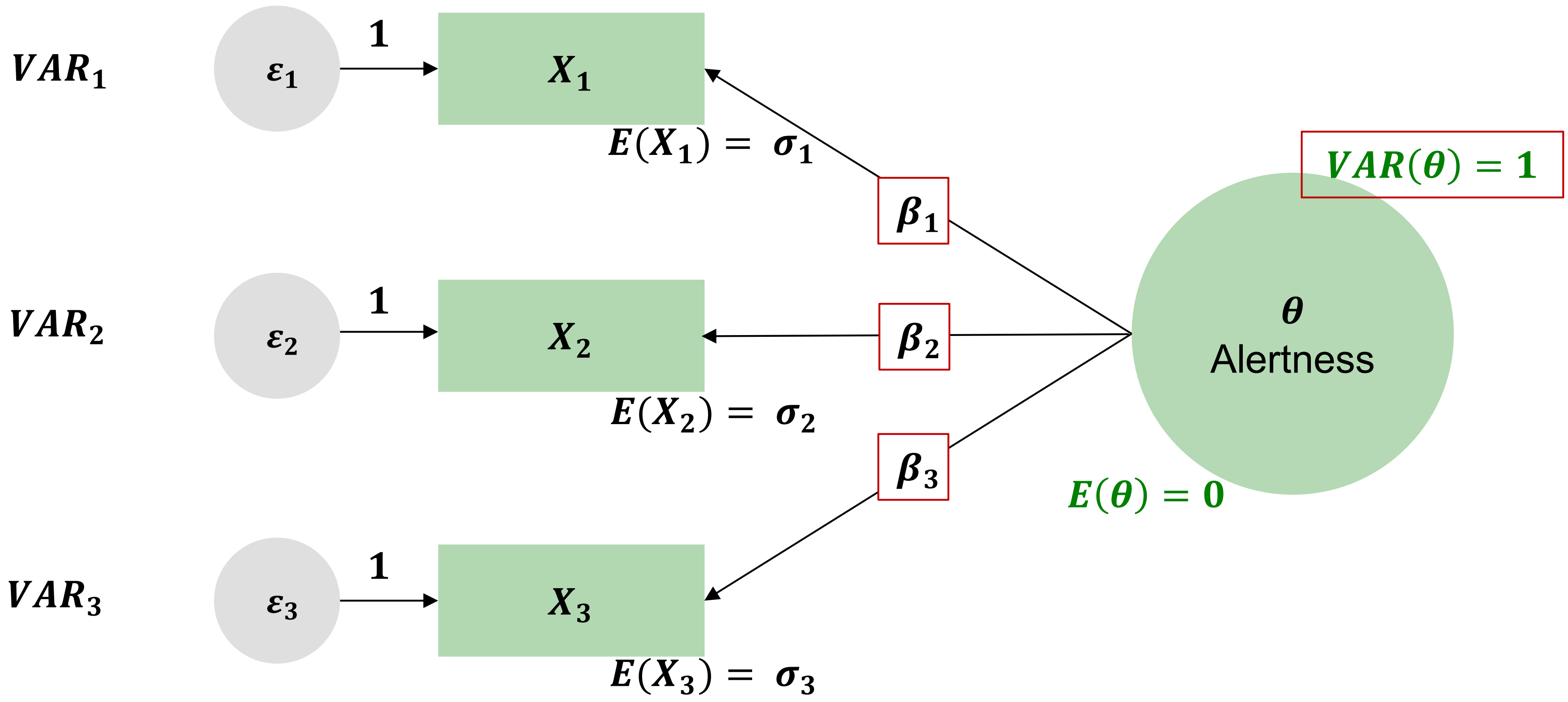
- Fragen:
  - Was sagen unterschiedliche Itemparameter über die Items aus?
  - Was sagen unterschiedliche Steigungen über die Items aus?
  - Was sagen unterschiedliche Fehlervarianzen über die Items aus?

τ-kongenerisches Modell – Zweite Annahme

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

- Genau wie in allen bisherigen Modellen: Die Fehlervariablen ε_i aller Items kovariieren nicht

Grafische Veranschaulichung des τ-kongenerischen Modells



Fixierte Parameter in dunkelgrün!

τ-kongenerisches Modell – Relevanz?

Im τ-kongenerischen Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare i, j

Die Items messen die latente Variable unterschiedlich gut und unterschiedlich genau und in unterschiedlichen Wertebereichen!

→ Für welche Arten von Items ist dies ein realistisches Modell?

- Ratingskalen-Items, die ein breites Konstrukt abbilden (ggf. mit unterschiedlichen Facetten)
- Items zur Erfassung des Arbeitsgedächtnis, wobei sich Ziffernspannen und Buchstabenspannen abwechseln

2. Testtheoretische Modelle

- Zusammenfassung aller bisherigen Modelle -

Zusammenfassung der bisherigen Modelle I

- Zusammenfassung der jeweils ersten Annahmen der Modelle, d.h. der Annahmen, die sich auf den Zusammenhang zwischen zufälligen latenten Variablen und zufälligen wahren Werten bzw. Itemantworten beziehen:

  - parallel: $X_i = \theta + \varepsilon_i$ da $\tau_i = \theta$
  - essentiell parallel: $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ da $\tau_i = \sigma_i + \theta$
  - τ -äquivalent: $X_i = \theta + \varepsilon_i$ da $\tau_i = \theta$
  - essentiell τ -äquivalent: $X_i = \sigma_i + \theta + \varepsilon_i$ da $\tau_i = \sigma_i + \theta$
  - τ -kongenerisch: $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$ da $\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$

Zusammenfassung der bisherigen Modelle II

Modell	Itemparameter	Steigungs-parameter	Gleiche Fehlervarianzen
parallel	nein	nein	ja
essentiell parallel	ja	nein	ja
τ-äquivalent	nein	nein	nein
essentiell τ-äquivalent	ja	nein	nein
τ-kongenerisch	ja	ja	nein

- Alle vier Modell nehmen zudem $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ für alle Itempaare *i,j* an

Das war‘s schon fast für heute…

- *Ausblick:* In der nächsten Vorlesung lernen wir ein letztes testtheoretisches Modell kennen und verschaffen uns einen ersten Überblick über die Gütekriterien.

- *Aber zuerst:*
  - **Gibt es offene Fragen zur heutigen Vorlesung?**
  - Zur Vertiefung:
    - Übungsblatt 4 zu allen testtheoretischen Modelle folgt nächste Woche
    - Bühner (2021, Kapitel 4, S. 157-186)

Anhang:
Erste Annahme im essentiell parallelen, essentiell τ – äquivalenten und τ –kongenerischen Modell

$\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$ und somit $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Interpretation der **Itemparameter**:
  $(\sigma_i\ und\ \beta_i\ sind\ Konstanten, \theta\ und\ X_i\ sind\ Zufallsvariablen)$

$$\boldsymbol{E(X_i)} = E(\sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i)$$

(A5) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$\boldsymbol{E(X_i)} = E(\sigma_i) + E(\beta_i \cdot \theta) + E(\varepsilon_i)$$

(A3) $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$

$$\boldsymbol{E(X_i)} = E(\sigma_i) + \beta_i \cdot E(\theta) + E(\varepsilon_i)$$

$Normierung$ $E(\theta) = 0$ (E2) $E(\varepsilon_i) = 0$

$$\boldsymbol{E(X_i)} = E(\sigma_i) + 0 + 0 = E(\sigma_i) = \boldsymbol{\sigma}_i$$

(A2) $E(a) = a$

- Der **Itemparameter** eines Items i entspricht also im essentiell parallelen, essentiell τ-äquivalenten und τ-kongenerischen Modell unter der Normierung $E(\theta) = 0$ dem **Erwartungswert der Itemantwort** einer zufällig gezogenen Person auf Item i.